Niech D oznacza koło $x^2 + (y-1)^2 \le 1, z = 0$ i niech OP będzie jego cięciwą, gdzie $O = (0,0,0)$ i $P = (x_P, y_P, 0)$.

A. Niech $P' = (x_P, y_P, \sqrt{x_P^2 + y_P^2})$. Wtedy odcinki OP' 'wymiatają' w przestrzeni powierzchnię o wzorze $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Objętość bryły pod tą powierzchnią i nad D jest równa

$$\iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Przechodząc do układu biegunowego, dostajemy

$$\iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} r\cdot r\ \ dr\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{8}{3}\sin^3\varphi\ \ d\varphi = \frac{32}{9}\ .$$

B. Niech p oznacza półokrąg o średnicy OP leżący w półpłaszczyźnie $\frac{y}{x} = \frac{y_p}{x_p},\ z \ge 0$. Wtedy półokręgi p 'wymiatają' powierzchnię o wzorze $z = f(x,y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$.

Objętość bryły pod tą powierzchnią i nad D jest równa

$$\iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Przechodząc do układu biegunowego, dostajemy

$$\iint\limits_{x^2+(y-1)^2\le 1} \sqrt{2y-x^2-y^2}\ \ dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{2r\sin\varphi - r^2}\cdot r\ \ dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

Uwaga. Gdy D ma promień R, to uzyskane odpowiedzi należy pomnożyć przez R^3.